

S'exprimer pour et par les mathématiques

Sylviane R. Schwer

Département de Mathématiques & LIPN & IREM Paris NORD
Institut Galilée, Université Paris 13
Université Sorbonne-Paris Cité

Journée académique, 3 décembre 2019

(Damourette & Pichon : essai de grammaire française : des mots à la pensée (1930-1956))

- 1 Vingt cent mille ânes dans un pré et s'en vint dans l'autre.
 - 2 Vincent mit l'âne dans un pré et cent vingt dans l'autre.
 - 3 Vingt cent mille ânes dans un pré et cent vingt dans l'autre.
 - 4 Vincent mit l'âne dans un pré et s'en vint dans l'autre.
-
- 1 Vingt cent mille ânes dans un pré **et** s'en vint dans l'autre.
 - 2 Vincent mit **l'**âne dans un pré et cent vingt dans l'autre.
 - 3 **Vingt cent** mille ânes dans un pré et cent vingt dans l'autre.
 - 4 Vincent mit l'âne dans un pré et s'en vint dans l'autre.

logos : culture grecque antique

Thème central de l'activité intellectuelle – philosophie - dans l'antiquité grecque, comprenant :
deux domaines : le **langage** et la **raison**
un conflit sous-jacent entre réel (instable, contingent) et le connaissable (stable, nécessaire)

la logique

l'étude de la raison dans le langage ou l'étude du discours rationnel.

– Platon (env-427- -348), Domaine du raisonnement verbal (dialectique), de la pensée spéculative.

–Aristote (-384 ; -322) et les stoïciens (fin -IV^o, -III^o s.) étude systématique .

Jusqu'au temps moderne, logique et dialectique sont souvent confondues (importance du langage). La logique est surtout centrée sur l'étude des formes de raisonnement.

- 1 étude des lois de la pensée
- 2 étude des conditions de vérité
- 3 sciences des formes du raisonnement
- 4 étude des moyens de discerner entre les inférences (arguments) valides et les autres.

activité de l'esprit	logique	manifestation linguistique
Concevoir	Concept/Notion	dénotation(expression)
Juger	Jugement	Proposition
Raisonner	Raisonnement	Suites de propositions

- principe d'identité : ce qui est est, ce qui n'est pas n'est pas. (permanence)
- principe du tiers exclu : Toute chose satisfait ou ne satisfait pas une propriété
- principe de non contradiction : il est impossible d'affirmer et de nier en même temps la même chose

Induction l'argumentation dans laquelle on passe du moins général, voir du particulier, au plus général.

Déduction l'argumentation dans laquelle on passe du plus général, au moins général

- A. Les haricots de ce sac sont blancs.
- B. Ces haricots viennent de ce sac
- C. Ces haricots sont blancs

A et B donc C
Les haricots de ce sac sont blancs.
Ces haricots viennent de ce sac.
Donc ces haricots sont blancs.
DÉDUCTION
RAISONNEMENT VALIDE

B et C donc A
Ces haricots viennent de ce sac
Ces haricots sont blancs.
Donc les haricots de ce sac sont blancs
INDUCTION
RAISONNEMENT INVALIDE CAR ABUSIF

A et C donc B
Les haricots de ce sac sont blancs.
Ces haricots sont blancs.
Donc ces haricots viennent de ce sac.
ABDUCTION
RAISONNEMENT INVALIDE EN SOI
BASE CONJECTUREL

Formellement il n'y a qu'un raisonnement valide, mais en remplaçant « donc » par « il est possible/probable que », c'est un raisonnement dialectique, celui de la meilleure explication possible, développée au cours d'un dialogue sur la recherche d'une hypothèse, est une induction vue du côté du sens commun, on prend l'explication la plus plausible.

Nous n'apprenons que par induction ou par déduction (démonstration). Or la déduction se fait à partir de principes universels, et l'induction, de cas particuliers. Mais il est impossible d'acquérir la connaissance des universaux autrement que par induction [...] et induire est impossible pour qui n'a pas la sensation.

Une théorie physique se vérifie ou pas, une théorie mathématique se prouve.

1847 (Boole, logicien, mathématicien et philosophe 1815-1864)
analyse de la logique, vers un calcul déductif du raisonnement.

(Tarski, logicien et philosophe polonais :1901-1983) :discipline qui analyse la signification des concepts communs à toutes les sciences et établit les lois générales gouvernants les concepts.

Basculement de la logique dans le domaine des mathématiques : *l'algèbre de la logique* (Congrès philosophie 1904) et maintenant *logique formelle, logique axiomatique.*

la logique axiomatique n'est pas une simple traduction en symboles algébriques de la logique dialectique.

Il n'y a pas une mais des logiques formelles, des logiques axiomatiques (intuitionistes, modales, ...).

les traits communs

- instrument de communication
- instrument de représentation du monde : description d'objets (ou notions), de leurs propriétés et des relations
- instrument de pensée
- signes arbitraires

constitution commune

Un **lexique** et une **grammaire**

trois dimensions communes (C. W. Morris, 1955)

syntaxe étude des relations entre les signes

sémantique étude des relations entre les signes et leurs significations (notions)

pragmatique étude des relations entre les signes et leurs utilisateurs (contextes)

propre au langage naturel

- double articulation (1960, Martinet) :
 - **phonèmes** unité minimale de son articulé, lié au système phonatoire
 - **monèmes** (mot, terme) unité minimale de sens : combinaison de phonèmes porteur de sens notionnel =lexème, ou de sens grammatical =morphème.
- je-ici-maintenant : un sujet énonciateur
- grammaires construites *a posteriori*

propre au langage formel

- indépendant du locuteur, traitement automatisable
- nécessite une méta-langue pour la construire comprenant les objets, propriétés et relations (instruments de pensée) et une langue véhiculaire (instrument de communication) pour présenter, expliquer, contester, . . .
- grammaire construite *a priori*
- la sémantique est très pauvre : valeur de vérités

Pour la logique bivaluée, on est triangle ou on ne l'est pas, le presque n'est pas acceptable.

« C'est un rouge rouge » n'est pas une tautologie dans la langue naturel. **A est A** est une tautologie, qui fait partie du langage de la logique.

Le lexique de base (alphabet numéral)

- **mots simples** : ceux qu'il faut apprendre par cœur sans référence à d'autres nombres qu'à eux-mêmes.
*Un, deux, trois, cinq, six, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, vingt**, cent, mille
- **mots dérivés** : ceux dont on peut retrouver la construction, ils comportent des suffixes ou des préfixes que l'on peut repérer. *onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, trente, quarante, cinquante, soixante, million, milliard*
- **mots ou signes de liaison** : - , et

les mots composés

Ils se construisent à partir du lexique de base : *dix-sept, dix-huit, dix-neuf, vingt-et-un, vingt-deux, quatre-vingt-dix-neuf*

Il s'agit bien d'une partie de la langue : un dictionnaire et une grammaire. Un mot nombre est l'équivalent d'une phrase.

jusqu'à vingt

- mots simples et dérivés
(un) ; (deux, trois, cinq, six) ; (quatre) ; (sept, huit, neuf) ; (dix) ;
(onze) ; (douze, treize, quatorze, quinze, seize), vingt
- mots composés (dix)-(sept, huit, neuf)

A : (deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf)

B : (dix, douze, treize, quatorze, quinze, seize, dix-sept, dix-huit, dix-neuf)

V : (un, . . . , dix-neuf) **V' :** (A, B) **D :** (vingt, trente, quarante, cinquante)

pour continuer jusqu'à cent

- mots simples et dérivés : vingt ; (trEnte, quarAnte, cinquAnte) ;
(soixAnte) ; cent
- mots composés
 - quatre-vingt(**s**, V) (soixante)-(et-un, et-onze, V')
 - D-(et un, A)

Notation : **A** : (deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf)
C : (un, . . . , quatre-vingt-dix-neuf)

pour continuer jusqu'à mille

- mots simples et dérivés : mille
- mots composés
 - cent-(C)
 - A-cent**s**
 - A-cent-C

Notation :

M : ([1], . . . , [99]) ; **M'** : ([2], . . . , [99])

pour continuer jusqu'à un million

- mots simples et dérivés : million
- mots composés
M'-mille-M ; un-million

Un bon traducteur doit maîtriser aussi bien la langue source que la langue cible.

langue source :

- onze, douze, . . . , seize : $[1]_{pref+}[10]_{add}, \dots [6]_{pref+}[10]_{add}$
- trente, quarante, cinquante, soixante :
 $[3]_{pref*}[10]_{mult}, \dots [6]_{pref*}[10]_{mult}$
- et : +
- règle multiplicative. Dans l'ordre d'énonciation
 - $[4]_{devant}[20]$ le multiplie
- règle aditive, . . .

miille-quatre-vingt-douze c'est $[1000] + [4][20] + [2] + [10] = 1$

millier + 4 vingtaines + 2 unités + 1 dizaine

qui s'écrit avec quatre chiffres - - - .

Une vingtaine vaut deux dizaines, donc 1 millier + 8 dizaines +

2 unités + 1 dizaine ou 1 millier + 9 dizaines + 2 unités

qui s'écrit 1 0 9 2

samedy XJe jour de septembre l'an mil CCCIIIJxx et neuf

La langue maternelle, familiale : leur lexique, leur grammaire.

La langue sociale : son lexique, sa grammaire.

La langue des copains : son lexique, sa grammaire.

la langue de ses activités particulières (clubs de sport, de musique).

La langue institutionnelle de l'école : son lexique, sa grammaire.

usage quotidien de la langue

Les énoncés usuels sont souvent des échanges sociaux conventionnels ou pour obtenir quelque chose

- salutation, demande d'un renseignement
- des promesses, permissions, persuasion
- des ordres
- peu d'explication

- par manque de vocabulaire : 5 000 mots disponibles contre 20 000 mots nécessaires en 6^e.
- par manque de compréhension entre notion et terme du vocabulaire
- polysémie à forte valeur psychologique dans certains domaines :
 - milieu : écosystème qui peut-être favorable ou défavorable, centre de symétrie en mathématique
 - problème d'argent, de géométrie
- confusion entre **contraire** et **contradictoire** : noir/blanc, grand/petit,
- langues et culture : représentations différentes du temps : avant/devant ou avant/derrière

La compréhension est un cas particulier du malentendu.

Witgenstein

Expliciter les implicites.

- importance de photographier les représentations initiales des élèves : **écrivez individuellement votre définition de tel terme ou telle expression, donner des exemples le hasard**
- relever toutes les définitions et en discuter
- faire un travail lexical (champ) et étymologique sur le terme ou l'expression, rechercher un caractère commun, dans l'idéal en interaction avec toutes les disciplines évoquées.
- donner la définition qui doit s'activer en mathématique, les opérations et relations associée
- recherche d'exemples et de contre-exemples par la classe
- question flash régulièrement : **tel entité est-il un.**

Le temps passé à cette activité se rattrape très vite

Toute discipline demande de produire des discours cohérents, donc muni d'une certaine structure logique.

Le langage naturel possède connecteurs et quantifications pour exprimer un discours cohérent, mais dont les propriétés varient en contexte.

- Tu entres OU tu sors ; Qu'il pleuve OU qu'il vente ;
Êtes-vous fou ou vous moquez-vous de moi ? - Les deux, mon général. (L'Interm. des chercheurs et curieux, 1951)
- Les passagers sont descendus ET l'avion a atterri.
- Si tu as faim, il reste du gâteau dans le réfrigérateur.
- Jean NE vient PAS, il accourt.

La logique mathématique : un langage expert

$OU_{logique} [\vee]$; $ET_{logique} [\wedge]$; $IMPLICATION_{logique} [\Rightarrow]$;
 $NEGATION_{logique} [\neg]$.

- 1 consolider la logique du quotidien
- 2 en montrer les insuffisances et la nécessité d'avoir des définitions précises et des règles de constructions
- 3 s'exercer régulièrement au travers des exercices rencontrés en classe au jour le jour, quelqu'en soit la teneur.

L'usage des quantificateurs :

Soit un triangle ABC, si ABC est rectangle en A, alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Pour tout triangle ABC, si ABC est rectangle en A, alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Faire des mathématiques actives : impossible sans maîtriser la langue. Situation de recherche en mathématique

- La question posée est courte et simple. Il n'y a pas de pré-requis technique ni de méthode de résolution privilégiée : On se donne un carré de taille quelconque (ou on dessine un carré au tableau). Peut-on le paver avec 6 carrés ? Questionnement des élèves pour préciser la question Les carrés doivent-ils avoir la même taille ?
- plusieurs stratégies peuvent amener à la résolution du problème. Justifier ces choix
- La situation se prête facilement à l'expérimentation : stratégies du type essai/erreur ou étude de petits cas : narration de recherche formulation des conjectures.
- L'expérience suggère de nouvelles questions, des variantes du problème de départ, des généralisations (y compris certaines pour lesquelles l'enseignant n'a pas de solution) On se donne un carré de taille quelconque et un entier n . Peut-on le paver avec n carrés ?